

### 3.10 Trigonometri

Ordet trigonometri kommer av trigonon som betyr trekant og metri som betyr måling. Trigonometri brukes i sammenheng med beregning av sider og vinkler i trekanter.

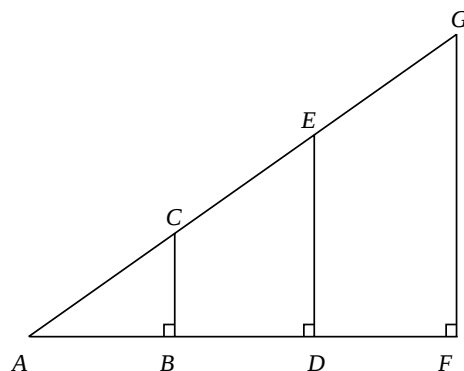
#### Sinus

I figur 3.79 er trekantene  $ABC$ ,  $ADE$  og  $AFG$  formlike, siden vinkel  $A$  er felles og  $BC$ ,  $DE$  og  $FG$  er parallelle.

Lengden  $AB=BD=DF$ , da vil  $AD=2AB$  og  $AF=3AB$ . Pga. formlikheten vil da tilsvarende  $DE=2BC$  og  $FG=3BC$ ;  $AE=2AC$  og  $AG=3AC$ . Hvis vi kaller  $BC=k$  og  $AC=h$ , vil tilsvarende  $DE=2k$  og  $FG=3k$ ;  $AE=2h$  og  $AG=3h$ .

Med utgangspunkt i vinkel  $A$ , vil motstående katet dividert med hypotenusen i trekanten hele tiden gi samme tall:

$$\text{Dvs.: } \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} \text{ fordi: } \frac{k}{h} = \frac{2k}{2h} = \frac{3k}{3h}$$

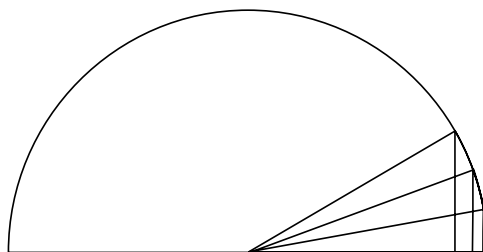


Figur 3.79

Dette forholdstallet er uavhengig av lengden på sidene i trekantene og bare avhengig av størrelsen på vinkelen A. Forholdstallet kalles sinus til vinkelen. Sidene trenger ikke være av lengden  $AB$ ,  $2AB$  eller  $3AB$ , men kan ha en vilkårlig lengde. På grunn av formlikheten vil forholdet hele tiden være det samme.

Hvilke verdier har dette sinustallet?

Tegn en halvsirkel som på figuren under. Tegn rettvinklede trekanter med vinklene  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  osv.



Figur 3.80

Mål på hver av trekantene lengden av den loddrette kateten og av hypotenusen. Divider deretter lengden av kateten med lengden av hypotenusen og sett resultatene inn i en tabell som under.

Kontroller verdiene du har fått mot dem du får på en kalkulator. Pass på at kalkulatoren er stilt inn på DEG (for degrees) og ikke RAD (for «gradianer» = sirkel på 400 grader) eller RAD (for radianer = sirkel lik  $2\pi$ ).

På denne måten kan man få sinusverdier mellom 0 og 90 grader. For 0 grader er sinusverdien definert lik 0, noe man kan se er sannsynlig ut fra å prøve sinusverdier for små gradtall, eller av figuren at den loddrette kateten vil nærme seg 0 når vinkelen nærmer seg 0 grader. På tilsvarende måte kan man se at det er rimelig å definere sinus til 90 grader lik 1.

| Antall grader | Loddrett<br>katet | Hypotenus | $\frac{\text{Katet}}{\text{Hypotenus}}$ | Fra kalkulator |
|---------------|-------------------|-----------|-----------------------------------------|----------------|
| 10            |                   |           |                                         |                |
| 20            |                   |           |                                         |                |
| 30            |                   |           |                                         |                |
| 40            |                   |           |                                         |                |
| 50            |                   |           |                                         |                |
| 60            |                   |           |                                         |                |
| 70            |                   |           |                                         |                |
| 80            |                   |           |                                         |                |

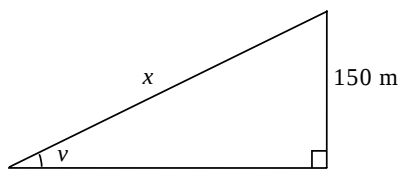
Tabell 3.1

Ptolemaios (ca år 100 e. Kr.) og Hipparkos (ca. 200- 100 f. Kr.) laget en tabell for hver kvarte grad mellom 0 og 90 grader. De beregnet korder i en sirkel, slik at i deres tabell var vinklene fra en halv til 180 grader og verdiene ble det dobbelte av sinusverdiene. Dette arbeidet regnes som en forløper til trigonometrien.

For en tabell over sinusverdier til ulike vinkler, se side 148.

### Eksempel

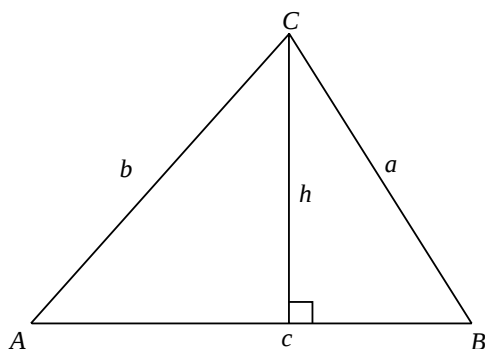
Hvor langt er det til toppen av en mast når masten er 150 m høy og vinkelen  $v$  mellom siktlinjen til bunnen og til toppen av masten er 22 grader?



Figur 3.81

Løsning:  $\sin 22^\circ = \frac{150}{x}$  som gir  $x = 400$ . Dvs., det er 400 m til toppen av masten.

## Formel for areal av trekant



Figur 3.82

Gitt en vilkårlig trekant  $ABC$ . Formelen for arealet av trekanten er

$$A = \frac{c \cdot h}{2}. \text{ Vi har}$$

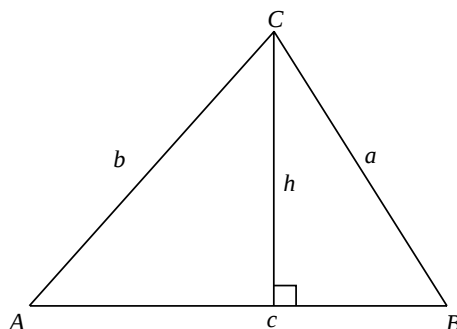
$$\sin A = \frac{h}{b}$$

som gir  $h = b \cdot \sin A$ , slik at formelen for en vilkårlig trekant blir

$$A = \frac{cb \sin A}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$

## Sinusproporsjonen eller sinussetningen

Gitt en vilkårlig trekant  $ABC$ .



Figur 3.83

Her er  $\sin A = \frac{h}{b}$  som gir  $h = b \cdot \sin A$ , og  $\sin B = \frac{h}{a}$  som gir  $h = a \cdot \sin B$ .

Dermed er:

$$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \text{ eller: } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

Tilsvarende kan vi trekke høyden fra  $A$  og får da:  $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .

Dette forholdet blir kalt sinusproporsjonen eller sinussetningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

### Å finne vinkelen når sinusverdien er kjent

Siden en bestemt vinkel gir en fast sinusverdi, vil motsatt en sinusverdi gi en bestemt vinkel i en rettvinklet trekant. For å finne vinkelen brukes knappen  $\sin^{-1}$  på kalkulatoren. En kontroll på at dette gjøres riktig er å prøve med verdien 0,5 som skal gi vinkelen  $30^\circ$ .

Med kunnskaper om sinus er det mulig å regne ut sider og vinkler i trekanter på en raskere måte og for flere trekanter enn man kunne tidligere.

#### Oppgaver 3.55

I trekanten  $ABC$  er  $\angle A = 34,0^\circ$ ,  $\angle B = 67,0^\circ$  og  $AB = 5,9$  cm. Tegn trekanten og beregn de øvrige sider, vinkler og arealet av trekanten.

#### Oppgave 3.56

Bestem de andre sidene og vinklene i trekanten  $ABC$  når:

- a)  $AB = 8,4$  cm,  $BC = 5,3$  cm og  $\angle B = 90,0^\circ$
- b)  $BC = 9,4$  cm,  $\angle C = 14,3^\circ$  og  $\angle A = 90,0^\circ$

Du har ingen fasit. Hvordan vil du kontrollere at du har regnet rett?

#### Oppgave 3.57

Et landområde har form som en trekant;  $ABC$  der  $\angle B = 78^\circ$ ,  $BC = 3,2$  km og  $BA = 4,1$  km.

- a) Bestem arealet av landområdet.
- b) Et annet landområde har samme form som arealet over, men  $AB$  og  $BC$  er dobbelt så lange som de var i a). Hvor stort blir arealet av det nye landområdet?

### Oppgave 3.58

- a)  $\sin u = 2/3$ . Hvor mange grader er vinkel  $u$ ?
- b) I trekanten  $ABC$  er vinkel  $A = u$ ,  $AB = 10$  cm og  $BC = a$ . Bestem for hvilke verdier av  $a$  det er en eller to eller ingen trekanter som oppfyller kravene.
- c) Hvor lang er  $AC$  i det tilfellet der  $a$  har en verdi slik at vi får akkurat en løsningstrekanter og  $a < AB$ ?

### Oppgave 3.59

En båt har grunnstøtt et stykke fra land, og for å bestemme avstanden til vraket, er det målt en linje  $AB = 115,5$  m langs vannkanten. Vraket ligger i  $C$ , og retningen dit er målt slik at vinkelen mellom siktelinjen til vraket og  $AB$  er  $88,4^\circ$  i  $A$ , og  $78,6^\circ$  i  $B$ . Tegn trekanten  $ABC$  og beregn avstanden  $AC$ .

### Oppgave 3.60

I et parallelogram er to sider lik 4,6 cm og 8,6 cm. Vinkelen mellom den korte siden og en diagonal er  $46^\circ$ . Beregn diagonalens lengde og vinklene i parallelogrammets hjørner.

Beregn også arealet av parallelogrammet.

### Cosinus

Sinus til en vinkel i en rettvinklet trekant er definert som motstående katet dividert på hypotenusen. Hvis man dividerer den andre kateten, kalt den hosliggende katet med hypotenusen, får vi en størrelse kalt cosinus til vinkelen. På samme måte som for sinus kan vi tegne opp rettvinklede trekanter med vinklene 10, 20, 30 grader osv. og regne ut disse cosinusverdiene. Hvis de settes inn i en tabell som for sinus, ser vi at verdiene varierer fra 1 til 0 når vinkelen varierer fra 0 til 90 grader. Se tabellen side 148.

### Oppgave 3.61

Lag en cosinustabell lik den for sinus. Sett opp vinkler fra 0 til 90 grader og fyll inn cosinusverdier.

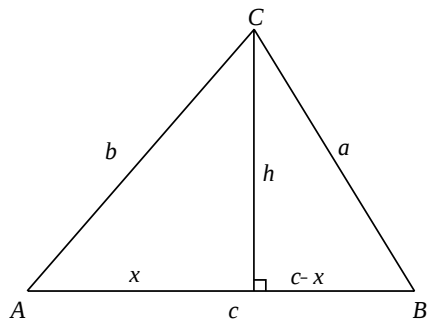
Cosinussetningen eller den utvidete pytagoreiske læresetning.

Gitt en vilkårlig trekant  $ABC$  (figur 3.84).

Siden trekanten  $ABC$  er delt inn i to rettvinklede trekanter ved høyden fra  $C$ , kan vi skrive

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ og } a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

eller



Figur 3.84

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ og } h^2 = a^2 - (c-x)^2.$$

Setter vi uttrykkene for  $h^2$  lik hverandre får vi:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$$

eller

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

som gir

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

eller

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

I trekanten  $ABC$  er  $\cos A = \frac{x}{b}$  eller  $x = b \cos A$ . Setter vi inn for  $x$  får vi

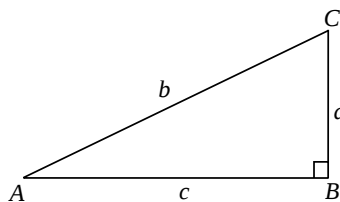
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Legg merke til sammenhengen med Pythagoras' læresetning som gjelder for rettvinklede trekanter, denne setningen gjelder for alle trekanter.

### Oppgave 3.62

I trekanten  $ABC$  er  $AB = 5,4$  cm,  $BC = 7,8$  cm og  $AC = 6,3$  cm. Hvor store er vinklene i trekanten?

En sammenheng mellom sinus og cosinus.  
Gitt en rettvinklet trekant  $ABC$ .



Figur 3.85

$\sin A = \frac{a}{b}$  kan skrives:  $a = b \cdot \sin A$  eller  $\cos A = \frac{c}{b}$ . Tilsvarende blir dette:  $c = b \cdot \cos A$ .

Siden trekanten  $ABC$  er rettvinklet, er  $b^2 = a^2 + c^2$ .

Setter vi inn for verdiene til  $a$  og  $c$  over, får vi:

$$b^2 = (b \cdot \sin A)^2 + (b \cdot \cos A)^2 \text{ eller } b^2 = b^2 \cdot \sin^2 A + b^2 \cdot \cos^2 A.$$

Divideres alle ledd med  $b^2$ , får vi følgende sammenheng:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

### Oppgave 3.63

Tegn graf over sinus- og cosinusverdier fra 0 til 90 grader.



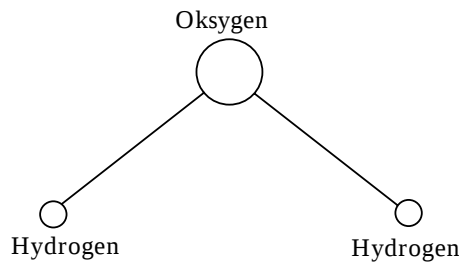
Figur 3.86

Ved å sette inn verdiene av sinus og cosinus til vinklene fra 0 til 90 grader, vil dette gi verdier mellom 0 og 1. Studer grafene og se etter likheter og forskjeller og kontroller om setningen over om sammenhengen mellom sinus og cosinus stemmer.

### Oppgaver 3.64

I et vannmolekyl ( $H_2O$ ) er den interne vinkelen i molekylet ca.  $104^\circ$ . Avstanden mellom hydrogenatomene og oksygenatomet er ca. 0,101 nm. (1nm = 1 nanometer = 0,000000001 m)

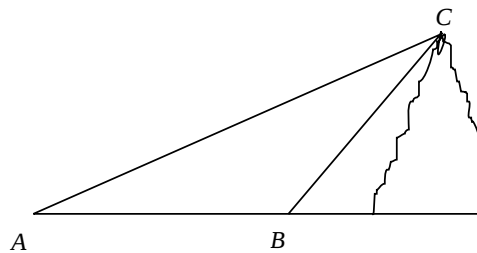
Hvor stor er avstanden mellom hydrogenatomene?



Figur 3.87

### Oppgave 3.65

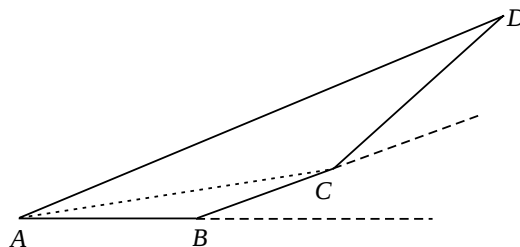
På figuren under sikter vi fra to punkter  $A$  og  $B$  mot en fjelltopp som ligger i  $C$ . Vi finner at vinkelen  $BAC = 25,3^\circ$  og vinkelen  $ABC = 132,3^\circ$ . Avstanden fra  $A$  til  $B$  er 982 m. Hvor langt er det i luftlinje fra  $A$  til fjelltoppen?



Figur 3.88

### Oppgave 3.66

Figuren under viser en båt som seiler 13,5 km fra  $A$  til  $B$ . Ved  $B$  skifter båten retning ( $20,4^\circ$ ) og seiler 12,4 km fra  $B$  til  $C$ . Så skifter båten retning igjen ( $22,3^\circ$ ) og seiler 14,5 km fra  $C$  til  $D$ . Hvor lang er avstanden fra  $A$  til  $D$ ?

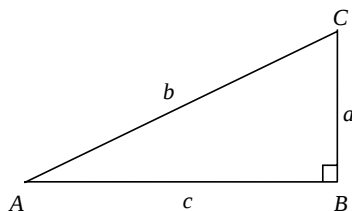


Figur 3.89

## Tangens

På samme måte som sinus til en vinkel er definert som motstående katet dividert på hypotenusen i en rettvinklet trekant og cosinus definert som hosliggende katet dividert på hypotenusen er tangens definert som motstående katet dividert med hosliggende katet.

Se side 148 for en tabell over tangensverdier for vinkler mellom 0 og 90 grader.



Figur 3.90

$$\sin A = \frac{a}{b} \quad \cos A = \frac{c}{b} \quad \tan A = \frac{a}{c}$$

Uttrykkene over kan skrives som  $a = b \cdot \sin A$  og  $c = b \cdot \cos A$ .

Settes dette inn i uttrykket for tangens, får vi

$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{b \cdot \sin A}{b \cdot \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

### Oppgave 3.67

- Lag en tabell over tangensverdier fra 0 til 90 grader på samme måte som for sinus og cosinus.
- Tegn en graf for verdiene i tabellen. Hva ser det ut til at tangens til 90 grader blir?

### Oppgave 3.68

80,0 m fra en bygning blir vinkelen mellom horisontalen og bygningens topp målt til  $25,0^\circ$ .

Hvor høy er bygningen?

### Oppgave 3.69

Solhøyden er vinkelen mellom horisontalen (vannrett på bakken) og solstrålene.

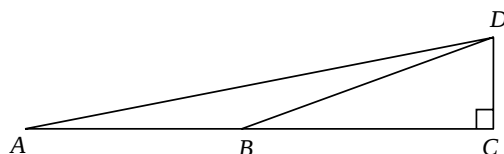
- En stolpe på 2,5 m kaster en skygge på 7,0 m. Hvor stor er solhøyden?
- I Oslo er solhøyden  $6,5^\circ$  midt på dagen ved vintersolverv. Om sommeren er solhøyden  $53,5^\circ$  midt på dagen. Et sted i Nord-

land er tilsvarende tall for solhøyden  $1,5^\circ$  og  $48,5^\circ$ . Regn ut hvor lang skygge et tre på 12,0 m har på en flat slette i Oslo og på stedet i Nordland.

### Oppgave 3.70

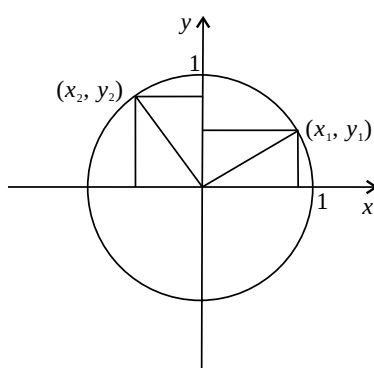
På figuren under er  $CD$  en mast som vi skal bestemme høyden av. Vi sikter mot masta fra to punkter  $A$  og  $B$ , som ligger 115 m fra hverandre.  $\angle CBD$  er  $20,0^\circ$  og  $\angle BAD$   $11,0^\circ$ . Sett  $BC = x$ .

- Forklar at vi får likningen:  $x \cdot \tan 20,0^\circ = (x + 115) \cdot \tan 11,0^\circ$ .
- Bestem  $BC$  og finn høyden av masta.



Figur 3.91

### Utviding av definisjonsområde for sinus og cosinus



Figur 3.92

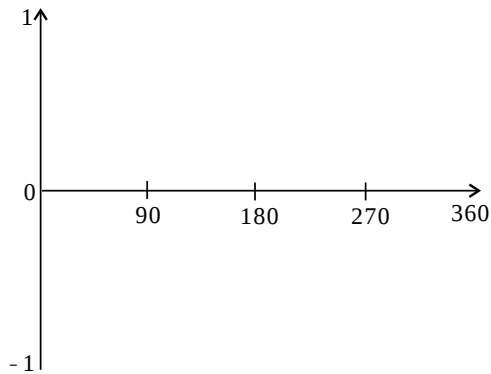
Gitt en sirkel med radius lik 1 i et koordinatsystem. Aktuell vinkel er vinkelen mellom positiv  $x$ -akse og en linje fra sentrum i sirkelen til sirkelbuen.

I 1. kvadrant er sinus til denne vinkelen lik  $y$ -koordinaten til et punkt på sirkelbuen og tilsvarende cosinusverdi er  $x$ -koordinaten. På figuren er dette gitt ved et eksempel ved koordinatene  $(x_1, y_1)$ .

Tilsvarende vil en vinkel i 2. kvadrant ikke lenger være en vinkel i en rettvinklet trekant, men sinus og cosinus vil være definert ved  $y$ - og  $x$ -koordinaten til punktet på sirkelbuen. Siden dette er i et koordinatsystem, vil  $x$ -verdien være negativ, slik at cosinus til en vinkel i 2. kvadrant varierer fra 0 til  $-1$  når vinkelen er mellom  $90$  og  $180$  grader.  $y$ -verdien vil variere fra 1 til 0 når vinkelen er mellom  $90$  og  $180$  grader.

### Oppgave 3.71

- a) Finn verdier av sinus og cosinus fra 90 til 360 grader ved hjelp av en kalkulator. Sett resultatene inn i en tabell og sammenlikn tallverdiene i intervallene 0- 90, 90- 180, 180- 270 og 270- 360 grader. Stemmer resultatene med det som kunne forventes ut fra sirkelen over? Hvilken sammenheng er det mellom tallverdiene?
- b) Tegn en graf tilsvarende de som ble tegnet tidligere av sinus- og cosinusverdier i samme koordinatsystem. Utvid den opprinnelige grafen slik at verdiene er fra 0 til 360 grader.



Figur 3.93

- c) Tegn tangensverdier inn i samme koordinatsystem.

### Oppgave 3.72

- a) Begrunn at  $\sin v = \sin(180^\circ - v)$  og at  $\cos v = -\cos(180^\circ - v)$
- b) En negativ, spiss vinkel vil ligge i 4. kvadrant. Begrunn at det følgende er riktig:
- $$\sin v = -\sin(-v) \text{ og } \cos v = \cos(-v)$$